

Burkard Polster und Andreas E. Schroth

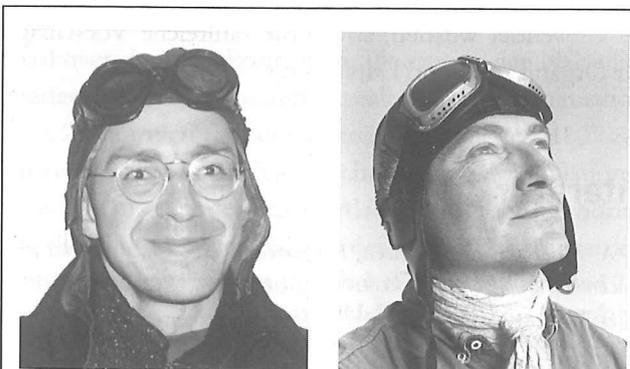
Halbe Doppeldecker Anschauliche Modelle von Semibiplanes

Gibt es in der Mathematik auch heute noch schöne Strukturen zu entdecken, die elementar und anschaulich darstellbar sind? Wir werden Ihnen eine junge geometrische Struktur vorstellen, die sich einfach konstruieren läßt und viele anschauliche, bisweilen verblüffende Modelle hat. Es handelt sich um „Semibiplanes“. Die Vielzahl von Modellen für Semibiplanes ist ein Indiz für die mannigfachen Verbindungen zwischen Semibiplanes und anderen geometrischen Strukturen. Bei diesen anderen geometrischen Strukturen handelt es sich um verallgemeinerte Vierecke und um verschiedene Typen von Kreisebenen. Es wird deutlich, daß auch neue Strukturen der abstrakten Inzidenzgeometrie sehr konkret und faßbar sein können. Mehr als elementare Kenntnisse der reellen Geometrie und die Bereitschaft, sich auf neue Sichtweisen einzulassen, brauchen Sie nicht, um unsere Konstruktionen nachvollziehen zu können.

Startpunkt für unsere Untersuchung ist der dreidimensionale reelle Raum, allerdings nicht mit der gewöhnlichen euklidischen Metrik, sondern mit der Minkowskimetrik versehen. Durch diese Metrik sind bestimmte Geraden, sogenannte Lichtgeraden, ausgezeichnet. Dies führt zum Konzept der Verbindbarkeit. Dieses Konzept ziehen wir zur Konstruktion einer anschaulichen Geometrie heran, die ganz im dreidimensionalen Raum lebt. Wir arbeiten die charakteristischen Eigenschaften dieser geometrischen Struktur heraus und kommen so zum Begriff der Semibiplane.

Anschließend konstruieren wir mit elementaren Mitteln weitere Modelle dieser Semibiplane. Dabei verblüfft, daß für ein und dieselbe Geometrie gänzlich unterschiedliche Modelle entstehen.

In einem abschließenden Abschnitt beleuchten wir die Verbindung zwischen den verschiedenen geometrischen Strukturen, die hinter den unterschiedlichen Modellen stehen. Die zentrale Geometrie ist dabei das reelle orthogonale Viereck. Dies ist gewissermaßen der geometrische Abschluß des Minkowskiraumes, d.h. des \mathbb{R}^3 mit den Licht-



Bruchpilot Burkard Polster lebt seit seiner Geburt 1965 in Würzburg ein unbeschwertes Leben voller Freunde, Töpferscheiben, Eindräder, Jonglierkram, Gitarren, Spiele, Sprachen ... und natürlich Mathematik. Sein Mathematikstudium war eine ausgedehnte Reise deren Hauptetappen die Universitäten in Würzburg, Albany (U.S.A.), Erlangen-Nürnberg, Kiel und Berkeley (U.S.A.) waren. Das Studium wurde von der Studienstiftung des deutschen Volkes unterstützt. Nach der Promotion 1993 bei Prof. Dr. K. Strambach in Erlangen über ein Thema in der Geometrie folgte ein zweijähriger Forschungsaufenthalt in Christchurch (Neuseeland) als Stipendiat der Alexander von Humboldt-Stiftung. Seit nunmehr zwei Jahren forscht er im Department of Pure Mathematics an der University of Adelaide als Stipendiat des Australian Research Councils.

Bruchpilot Andreas E. Schroth fühlt sich am wohlsten, wenn das „plane“ in „biplane“ durch „cycle“ ersetzt wird. Geboren Weibachten 1960 und aufgewachsen in einem schwäbischen Weiler ob der Fils schwang er sich schon früh aufs Fahrrad um zunächst die nähere, dann die weitere Umgebung und schließlich die südlich angrenzenden Länder zu erfahren. Auf einer ausgedehnten Fahrradtour durch den indischen Subkontinent erlag er den Genüssen der vegetarischen indischen Küche. Sein Mathematikstudium an der Universität Tübingen wurde durch einen vom DAAD geförderten einjährigen Aufenthalt am Gonville and Caius College unterbrochen, durch ein Promotionsstudium in Braunschweig 1992 bei Prof. Dr. R. Löwen abgeschlossen und von der Studienstiftung des deutschen Volkes finanziell unterstützt. Nach seiner Habilitation 1994 in Braunschweig, die ihm einen Preis des Braunschweigischen Hochschulbundes einbrachte, war er vertretungsweise in Tübingen und Kiel. Inzwischen ist er wieder in Braunschweig gelandet.

geraden. Das reelle orthogonale Viereck ist das klassische Beispiel eines antiregulären Vierecks. Die Verallgemeinerung dieser Betrachtungsweise führt zu einer Konstruktion von Laguerreebenen aus antiregulären Vierecken. Diese Konstruktion ist verwandt mit der Konstruktion von Semibiplanes aus antiregulären verallgemeinerten Vierecken. Daher können Semibiplanes auch als Untergeometrien von Laguerreebenen betrachtet werden. Auch diese Sichtweise verallgemeinert eines unserer Modelle.

1. Vorbereitungen

Verschiedene Menschen verbinden unterschiedliche Vorstellungen mit dem Begriff Geometrie. In dieser Arbeit nehmen wir einen inzidenzgeometrischen Standpunkt ein. Eine Geometrie $G = (\mathbf{P}, \mathbf{B}, \mathbf{I})$ besteht aus einer Punktmenge \mathbf{P} , einer Blockmenge \mathbf{B} und einer Relation \mathbf{I} zwischen Punkten und Blöcken. Die Relation \mathbf{I} heißt *Inzidenzrelation*. Für $p \in \mathbf{P}$ und $b \in \mathbf{B}$ mit $p \mathbf{I} b$ verwenden wir die folgenden Sprechweisen: „ p inzidiert mit b “, „ b inzidiert mit p “, „ p liegt auf b “ oder „ b geht durch p “.

Oft sind Blöcke Teilmengen der Punktmenge, und die Inzidenzrelation wird durch das Enthaltensein induziert. Mitunter ist es jedoch geschickter, Blöcke nicht als Mengen von Punkten aufzufassen. Einige der Modelle in dieser Arbeit belegen, daß dieser abstraktere Inzidenzbegriff sogar zu anschaulicheren Modellen führen kann.

2. Der Minkowskiraum

Unsere Betrachtungen finden zunächst im dreidimensionalen reellen Minkowskiraum statt. Als Punktmenge ist dies der \mathbf{R}^3 . Im Gegensatz zum euklidischen Raum berechnet sich der Abstand zwischen zwei Punkten $v = (v_1, v_2, v_3)$ und $w = (w_1, w_2, w_3)$ jedoch zu

$$d(v, w) = (w_1 - v_1)^2 + (w_2 - v_2)^2 - (w_3 - v_3)^2.$$

Diese Metrik ist aus der allgemeinen Relativitätstheorie bekannt, mit dem einzigen Unterschied, daß dort noch

eine zusätzliche Raumkoordinate auftritt. Die Metrik, so wie wir sie verwenden, ist also die Metrik der Relativitätstheorie in der Ebene. Die ersten beiden Koordinaten sind die Ortskoordinaten, die letzte die Zeitkoordinate. Da die Illustrationen zu Arbeiten in der Relativitätstheorie oft auf eine Ortskoordinate verzichten, haben sie große Ähnlichkeit mit den Abbildungen im vorliegenden Artikel. Um die Analogie zur Relativitätstheorie zu betonen, verwenden wir zum Teil die dort gebräuchliche Terminologie.

Die Minkowskimetrik ist keine Metrik im mathematischen Sinn. Die Dreiecksungleichung ist nicht erfüllt, zwei Punkte können einen negativen Abstand haben und zwei verschiedene Punkte können den Abstand 0 haben. Die letzte Möglichkeit ist für uns von besonderem Interesse. Zwei Punkte v und w mit $d(v, w) = 0$ nennen wir *verbindbar* und notieren dies als $v \sim w$. Wir nennen die Gerade $\{(tv + (1-t)w) \mid t \in \mathbf{R}\}$ durch die verbindbaren Punkte v, w , eine *Lichtgerade* und bezeichnen sie mit $v \vee w$. Einfaches Nachrechnen zeigt, daß

$$d(v, tv + (1-t)w) = (1-t)^2 d(v, w)$$

gilt. Somit sind zwei Punkte genau dann verbindbar, wenn sie auf einer Lichtgeraden liegen. Dies erklärt den Begriff „verbindbar“.

Der *Lichtkegel* v^\perp eines Punktes v ist die Menge aller mit v verbindbaren Punkte. Der Lichtkegel des Ursprungs berechnet sich zu

$$(0, 0, 0)^\perp = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = z^2\}.$$

Für einen beliebigen Punkt $v = (v_1, v_2, v_3)$ gilt

$$\begin{aligned} v^\perp &= (0, 0, 0)^\perp + v \\ &= \{(x, y, z) \mid (x - v_1)^2 + (y - v_2)^2 = (z - v_3)^2\}. \end{aligned}$$

Alle Lichtkegel sind Translate des Lichtkegels $(0, 0, 0)^\perp$. Die Lichtgeraden durch $(0, 0, 0)$ sind genau die Geraden des \mathbf{R}^3 , die ganz in $(0, 0, 0)^\perp$ liegen. Daher ist eine Gerade genau dann eine Lichtgerade, wenn sie zu einer im Lichtkegel durch den Ursprung enthaltenen Geraden parallel ist.

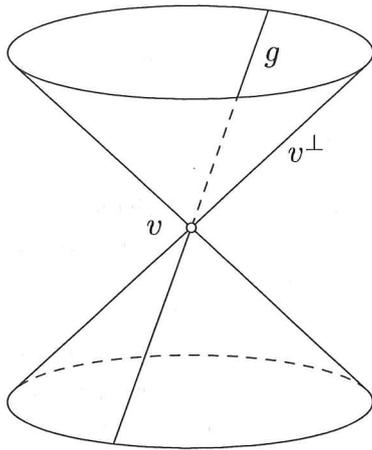


Bild 1: Der Lichtkegel v^\perp ist eine Doppelkegel mit Spitze v und einer Rotationsachse parallel zur z -Achse. Die Gerade g ist eine typische Lichtgerade durch v .

3. Eine Geometrie aus Lichtkegeln

Unser Ziel ist, mit diesen Lichtkegeln eine neue Geometrie zu bilden. Dazu wählen wir die Punkte $p = (0, 0, 1)$ und $q = (0, 0, -1)$. Für die Menge der mit p und q verbindbaren Punkte gilt:

$$p^\perp \cap q^\perp$$

$$= \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - (z-1)^2 = 0 = x^2 + y^2 - (z+1)^2\}$$

$$= \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = 1\} =: k_0.$$

Dies ist der Einheitskreis in der x, y -Ebene.

Die Punkte unserer Geometrie sind die Punkte auf dem Lichtkegel von p , die zwischen p und k_0 liegen. Die Blöcke sind die Punkte auf dem Lichtkegel von q , die zwischen q und k_0 liegen. Das heißt:

$$\mathbf{P} = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = (z-1)^2 \text{ und } 0 < z < 1\}$$

$$= \{(x, y, z) \in p^\perp \mid 0 < z < 1\},$$

$$\mathbf{B} = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = (z+1)^2 \text{ und } 0 > z > -1\}$$

$$= \{(x, y, z) \in q^\perp \mid 0 > z > -1\}.$$

Um die Inzidenz zu beschreiben, ziehen wir die Lichtgeraden heran. Ein Punkt $s = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbf{P}$ inzidiert mit einem Block $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbf{B}$, falls s und b durch eine Lichtgerade verbunden werden können, d.h. falls $s \sim b$ gilt. Aus der im Kasten ausgeführten Berechnung des Abstandes zwischen einem Punkt und einem Block folgt für die Inzidenz:

$$(1) \quad s \mathbf{I} b \Leftrightarrow s \sim b \Leftrightarrow s_1 b_1 + s_2 b_2 + s_3 (1 - b_3) = 1 + b_3.$$

Damit haben wir die Inzidenzgeometrie $(\mathbf{P}, \mathbf{B}, \sim)$ definiert. Wer die Konstruktion aufmerksam nachvollzieht, wird feststellen, daß es Punktepaaire gibt, die nicht auf

Aus $s \in \mathbf{P}$ und $b \in \mathbf{B}$ folgt zunächst

Abstand im Minkowskiraum

$$s_1^2 + s_2^2 - s_3^2 = 1 - 2s_3,$$

$$b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 = 1 + 2b_3.$$

Der Abstand zwischen s und b berechnet sich damit zu

$$\begin{aligned} d(s, b) &= (s_1 - b_1)^2 + (s_2 - b_2)^2 - (s_3 - b_3)^2 \\ &= s_1^2 + s_2^2 - s_3^2 + b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 - 2(s_1 b_1 + s_2 b_2 - s_3 b_3) \\ &= 1 - 2s_3 + 1 + 2b_3 - 2(s_1 b_1 + s_2 b_2 - s_3 b_3) \\ &= 2(1 + b_3 - (s_1 b_1 + s_2 b_2 + s_3 (1 - b_3))). \end{aligned}$$

Der Abstand zwischen einem Punkt und einem Block der Geometrie wird also durch einen linearen Term beschrieben. Im Gegensatz dazu wird der Abstand zweier beliebiger Punkte des Minkowskiraumes durch einen quadratischen Term beschrieben.

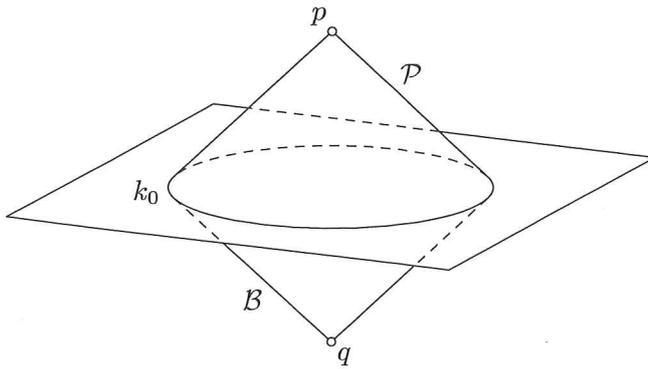


Bild 2: Die Punkte der Geometrie sind die Punkte des Kegels über k_0 mit Spitze p . Die Blöcke sind die Punkte des Kegels über k_0 mit Spitze q .

einem gemeinsamen Block liegen. Wir werden weiter unten feststellen, daß zwei Punkte genau dann nicht durch einen Block verbindbar sind, wenn ihre Verbindungsgerade in \mathbf{R}^3 durch p geht, also eine Lichtgerade ist. Ebenso gibt es Blöcke, die nicht mit einem gemeinsamen Punkt inzidieren. Dies führt zum Begriff der Parallelität. Wir nennen zwei Punkte $r, s \in \mathbf{P}$ *parallel*, wenn es keinen Block gibt, der mit beiden Punkten gleichzeitig inzident ist, oder wenn $r = s$ gilt. Entsprechend nennen wir zwei Blöcke r und s *parallel*, wenn es keinen Punkt gibt, der mit beiden Blöcken gleichzeitig inzident ist, oder wenn $r = s$ gilt. Die Tatsache, daß auch Punkte parallel sein können, ist vielleicht etwas ungewohnt, hat aber, beispielsweise in der Kreisgeometrie, Tradition.

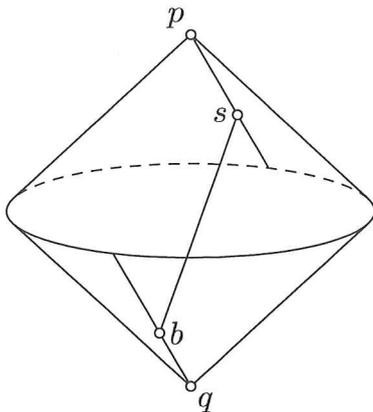


Bild 3: Ein Punkt s inzidiert mit einem Block b , wenn die Verbindungsgerade eine Lichtgerade ist. Die Punkte parallel zu s und die Blöcke parallel zu b liegen auf der Geraden durch s und p bzw. b und q .

Wir wollen nun einige charakteristische Eigenschaften der konstruierten Geometrie herausarbeiten. Dazu bedienen wir uns eines leicht veränderten Modells dieser Geometrie. Wir ersetzen jeden Block durch die Menge der mit ihm inzidenten Punkte. Zum einen erhalten wir dadurch eine Geometrie, in der wie gewohnt Blöcke Teilmengen des Punktraums sind. Zum anderen, und dies ist für die Beweisführung sehr nützlich, lassen sich diese Teilmengen durch ebene Schnitte beschreiben.

Ein Block $b = (b_1, b_2, b_3)$ wird also ersetzt durch $b^\perp \cap \mathbf{P} \subset b^\perp \cap p^\perp$. Da zwei verschiedene Blöcke nicht mit genau den gleichen Punkten inzidieren, ist diese Zuordnung injektiv.

Aus der in Gleichung 1 festgestellten linearen Bedingung für die Inzidenz folgt $b^\perp \cap p^\perp = p^\perp \cap H$ mit

$$H = \{(x, y, z) \mid b_1 x + b_2 y + (1 - b_3) z = 1 + b_3\}.$$

Die Ebene H läßt sich auch geometrisch bestimmen. Sei g die Verbindungsgerade von b und q . Da b mit q verbindbar ist, ist diese Gerade eine Lichtgerade. Die Gerade g ist die einzige Lichtgerade durch b , die q^\perp in einem von b verschiedenen Punkt schneidet. Sie schneidet die x, y -Ebene in einem Punkt $c \in k_0$. Nach Konstruktion gilt $c \in b^\perp \cap p^\perp \subset H$. Kein weiterer Punkt auf k_0 liegt in H , denn jeder solche Punkt läge auf einer Lichtgeraden durch b , die q^\perp in einem von b verschiedenen Punkt trifft. Eine solche Lichtgerade gibt es nicht.

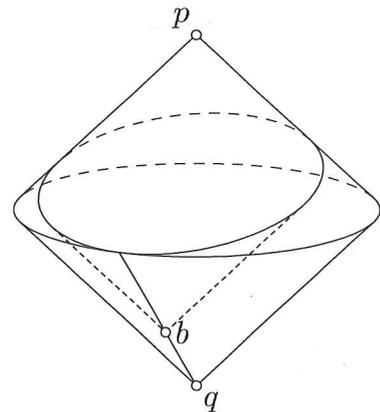


Bild 4: Ein Block b wird durch den Schnitt des Lichtkegels von b mit dem Lichtkegel von p ersetzt.

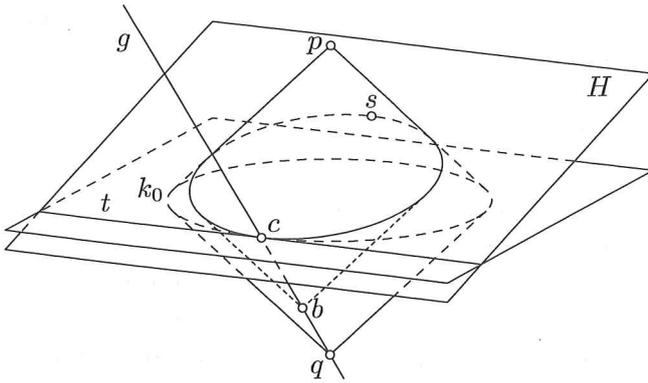


Bild 5: Geometrische Bestimmung der Schnittebene: Die Ebene H wird durch den Punkt s und die Gerade t aufgespannt. Die Gerade t ist die Tangente an k_0 im Punkt c . Der Punkt c ist der Schnittpunkt des Kreises k_0 mit der Geraden durch b und q .

Das bedeutet, daß der Schnitt der Ebene H mit der x, y -Ebene die eindeutig bestimmte Tangente in der x, y -Ebene an den Kreis k_0 im Punkt c ist. Wir bezeichnen diese Tangente mit t . Die Ebene H wird von t und irgendeinem der mit b verbindbaren Punkte aus \mathbf{P} aufgespannt.

Diese Konstruktion macht deutlich, daß die Blöcke unserer Geometrie genau den Ellipsen auf dem Lichtkegel p^\perp entsprechen, die den Kreis k_0 berühren und, bis auf jeweils ihren Berührungspunkt mit k_0 , ganz in der Menge \mathbf{P} enthalten sind.

Wir wollen nun untersuchen, wieviele Blöcke mit zwei gegebenen Punkten inzidieren. Seien s und t zwei verschiedene Punkte in \mathbf{P} und l die Verbindungsgerade der beiden Punkte. Ist l eine Lichtgerade, sind die beiden Punkte also verbindbar, so gibt es keinen Block, der mit beiden Punkten inzident ist. Ist l keine Lichtgerade, so entspre-

chen die Blöcke, die beide Punkte enthalten, gerade den Ebenen, die l enthalten und k_0 in genau einem Punkt berühren. Wir behaupten, daß es genau zwei solcher Ebenen gibt. Um dies einzusehen betrachten wir die Schnitte der Ebenen, die l enthalten, mit der x, y -Ebene. Trifft l die x, y -Ebene in einem Punkt u , so liefern diese Schnitte das Bündel der Geraden durch u . Der Punkt u liegt außerhalb des Kreises k_0 . Daher gibt es genau zwei Geraden g_1, g_2 durch u , die k_0 berühren. Schneidet l die x, y -Ebene nicht, so liefern die Schnitte der Ebenen, die l enthalten, mit der x, y -Ebene die Klasse der zu l parallelen Geraden in der x, y -Ebene. Diese Klasse enthält genau zwei Geraden g_1, g_2 , die k_0 berühren.

Wir haben somit erkannt, daß zwei Punkte genau dann parallel sind, wenn sie auf einer gemeinsamen Geraden durch p liegen und daß zwei nichtparallele Punkte durch genau zwei Blöcke verbunden werden.

Die betrachtete Geometrie läßt sich auf den Kopf stellen. Dadurch werden die Rollen von Punkten und Blöcken vertauscht. In dieser sogenannten dualen Geometrie kann das eben geführte Argument wiederholt werden. Dies zeigt, daß zwei Blöcke genau dann parallel sind, wenn sie auf einer gemeinsamen Geraden durch q liegen und daß sich zwei nichtparallele Blöcke in genau zwei Punkten schneiden.

Aus der Beschreibung der Parallelität durch Geraden durch p bzw. q folgt, daß die Parallelrelation auf dem Punktraum und die Parallelrelation auf dem Blockraum jeweils eine Äquivalenzrelation ist. Geometrien, bei denen dies der Fall ist, heißen *teilbar*.

Offensichtlich ist, daß zwei verschiedene Punkte immer durch einen *Blockzug* verbunden werden können.

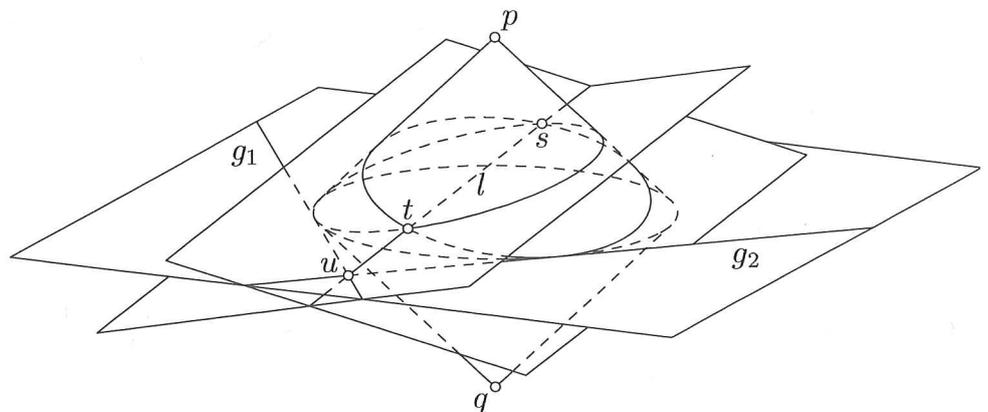


Bild 6: Konstruktion der Blöcke durch zwei nichtparallele Punkte.

Dabei ist ein Blockzug analog zu einem Streckenzug in der euklidischen Ebene definiert. Die Geometrie ist also *zusammenhängend*. Zudem ist jeder Block mit wenigstens drei Punkten und jeder Punkt mit wenigstens drei Blöcken inzident.

Zusammenfassend gilt also, daß die betrachtete Geometrie $(\mathbf{P}, \mathbf{B}, \sim)$ eine teilbare Geometrie ist, die die folgenden Axiome erfüllt:

(S1) Je zwei verschiedene Punkte sind entweder parallel oder mit genau zwei Blöcken inzident.

(S2) Je zwei verschiedene Blöcke sind parallel oder mit genau zwei Punkten inzident.

(S3) Die Geometrie ist zusammenhängend.

(S4) Jeder Punkt ist mit wenigstens drei Blöcken und jeder Block mit wenigstens drei Punkten inzident.

Eine Geometrie, die diesen Axiomen genügt, heißt Semibiplane. Die betrachtete Geometrie ist also eine teilbare Semibiplane. Biplanes und Semibiplanes wurden von D. R. Hughes [2] eingeführt. P. Wild hat in [7] und [8] Semibiplanes eingehend untersucht.

Wir möchten darauf hinweisen, daß sich die Geometrie ganz durch Verbindbarkeit bzw. Lichtgeraden beschreiben läßt. In einer Geometrie, die die Geometrie des \mathbf{R}^3 mit den Lichtgeraden in geeigneter Weise verallgemeinert, läßt sich daher diese Konstruktion ebenfalls ausführen. Wir werden diesen Gedanken im letzten Abschnitt wieder aufgreifen. Zunächst wollen wir jedoch weitere Modelle für die oben konstruierte Semibiplane vorstellen. Diese Modelle werden die Verwandtschaft zwischen Semibiplanes und Untergeometrien von Kreisebenen demonstrieren.

Semibiplanes

Der Begriff „Semibiplane“ erklärt sich wie folgt: Das „bi“ besagt, daß, im Gegensatz zu projektiven Ebenen, je zwei nichtparallele Punkte durch genau zwei Blöcke verbunden werden und sich zwei nichtparallel Blöcke in genau zwei Punkten schneiden. Das „semi“ bedeutet, daß es parallele Punkte und Blöcke geben kann.

Im Englischen steht „biplane“ auch für „Doppeldecker“. Daher läßt sich „Semibiplane“ auch mit „halber Doppeldecker“ übersetzen.

4. Ebene Modelle

Wir gehen zunächst von dem Modell aus, bei dem Blöcke Teilmengen der Punktmenge sind. Die Punktmenge dieses Modells läßt sich auf zwei Arten geschickt projizieren. Dabei werden Blöcke als Punktmenge mitprojiziert. Die erste Projektion ist die Parallelprojektion in z -Richtung auf die x, y -Ebene. Dies liefert das Kreismodell. Die zweite Projektion ist die Zentralprojektion vom Ursprung auf den Zylinder $Z = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Dies liefert das Zylindermodell.

4.1 Das Kreismodell

Bei der Parallelprojektion in z -Richtung auf die x, y -Ebene wird die Punktmenge mit dem Inneren des Kreises k_0 ohne den Ursprung identifiziert. Einfache Rechnungen ergeben, daß die Blöcke genau den Ellipsen entsprechen, die

- symmetrisch zu einer Geraden durch den Ursprung sind,
- den Kreis k_0 berühren,
- den Ursprung in ihrem Inneren enthalten und
- Hauptachsen im Verhältnis $(2a) : (1 + a)$, mit $0 < a < 1$ haben.

In diesem Modell sind zwei Punkte genau dann parallel, wenn sie beide in einer vom Ursprung ausgehenden Halbgeraden enthalten sind. Zwei Blöcke sind genau dann parallel, wenn sie den Kreis k_0 im gleichen Punkt berühren.

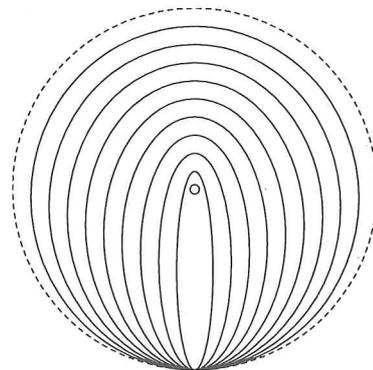


Bild 7: Parallelprojektion auf die x, y -Ebene ergibt das Kreismodell. Gezeichnet sind einige Blöcke einer Parallelklasse.

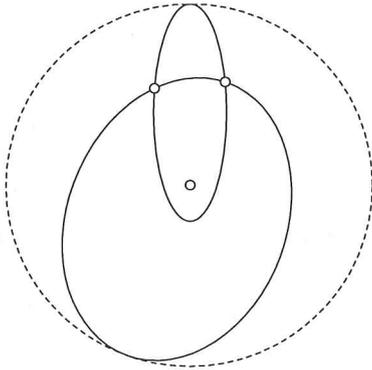


Bild 8: Zwei Blöcke, die sich in zwei Punkten schneiden, im Kreismodell betrachtet.

4.2 Das Zylindermodell

Bei der Zentralprojektion mit Zentrum $(0, 0, 0)$ auf den Zylinder Z wird die Punktmenge \mathbf{P} mit der oberen Hälfte

$$\{(x, y, z) \in Z \mid z > 0\}$$

des Zylinders identifiziert. Die Blöcke entsprechen dann den Schnitten dieser oberen Hälfte mit nichtvertikalen Ebenen, welche die x, y -Ebene in einer Tangente an k_0 schneiden. In diesem Modell sind zwei Punkte genau dann parallel, wenn sie beide in einer der senkrechten Geraden auf dem Zylinder enthalten sind und zwei Blöcke sind genau dann parallel, wenn sie den Kreis k_0 im gleichen Punkt berühren.

Dieses Modell weckt vielleicht Erinnerungen an das Zylindermodell der klassischen Laguerreebene, d.h. der Geometrie der Schnitte des Zylinders mit den nichtvertikalen Ebenen des \mathbf{R}^3 . In der Tat haben wir die Semibiplane als eine Untergeometrie in dieser Laguerreebene beschrieben. Der Kreis k_0 ist ein Kreis der Laguerreebene. Er teilt die Laguerreebene in zwei Zusammenhangskomponenten. Eine dieser Zusammenhangskomponenten ist \mathbf{P} . Die Blöcke sind alle Kreise der Laguerreebene, die den Kreis k_0 berühren und, abgesehen von diesem Berührungspunkt, in \mathbf{P} liegen. Diese Betrachtungsweise läßt weitreichende Verallgemeinerungen zu. Dies ist in [5], [4] und [3] im Detail durchgeführt worden.

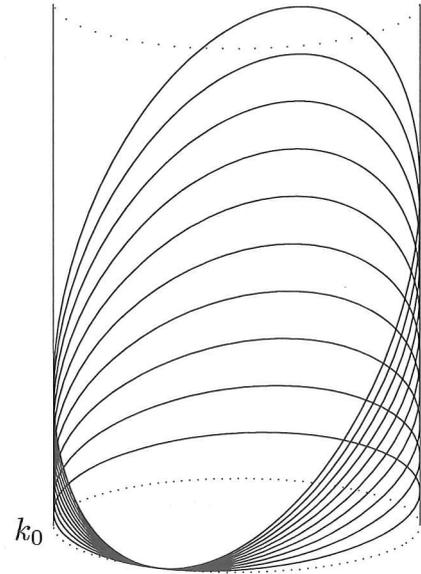


Bild 9: Zentralprojektion auf einen Zylinder, wobei das Projektionszentrum der Ursprung ist, ergibt das Zylindermodell. Gezeichnet sind einige Blöcke einer Parallelklasse.

4.3 Apollonische Modelle

Wir kehren nochmals zu unserem ursprünglichen Modell zurück um daraus eine neue Serie von Modellen zu konstruieren. Die Punkte und Blöcke in diesen Modellen sind spezielle Mengen von Punkten und Kreisen in der euklidischen Ebene. Dabei fassen wir Punkte der Ebene auch als Kreise mit verschwindendem Radius auf.

Die Konstruktion der Modelle ist in einem Kasten beschrieben, und hängt von einem reellen Parameter t ab. Besonders interessante Modelle ergeben sich für $t = 1$ und $t = 0$. Für die Abbildungen des Apollonischen Modelle verwenden wir folgende Konvention: Kreise, die Punkten entsprechen, werden gestrichelt gezeichnet, Kreise, die Blöcken entsprechen, werden durchgezogen gezeichnet. Der Randkreis wird ebenfalls gestrichelt gezeichnet.

Für $t = 1$ sind die Punkte alle Kreise durch $(0, 0)$, die ganz in der Kreisscheibe $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 2\}$ liegen. Die Blöcke sind alle Kreise, die den Kreis $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 2\}$ von innen berühren und den Punkt $(0, 0)$ in ihrem Inneren enthalten. In diesem Modell sind zwei Punkte genau dann parallel, wenn sie nur den Punkt $(0, 0)$ gemeinsam haben und einer im Inneren des anderen enthalten ist. Zwei Blöcke sind genau dann parallel, wenn sie, als Kreise betrachtet, den Kreis $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 2\}$ im gleichen

Konstruktion der apollonischen Modelle

Die Konstruktionsidee der apollonischen Modelle ist wie folgt: Mit E_t wird die Ebene $z = t$ bezeichnet. Ein Punkt $s \in \mathbf{P}$ wird durch $s^\perp \cap E_t$ ersetzt. Analog wird ein Block b durch $b^\perp \cap E_t$ ersetzt. Mit anderen Worten, ein Punkt oder ein Block v wird ersetzt durch die Menge der Punkte, in denen die Lichtgeraden durch v die Ebene E_t durchstoßen.

Einfache Rechnungen zeigen, daß ein Punkt $s = (s_1, s_2, s_3)$ durch den Kreis mit Mittelpunkt (s_1, s_2) und Radius

$$|s_3 - t| = |1 - \sqrt{s_1^2 + s_2^2} - t|$$

ersetzt wird. Ein Block $b = (b_1, b_2, b_3)$ wird durch den Kreis mit Mittelpunkt (b_1, b_2) und Radius

$$|b_3 - t| = |\sqrt{b_1^2 + b_2^2} - 1 - t|$$

ersetzt.

Punkt berühren.

Für $t = 0$ ergibt sich ein sehr kuriose Modell. Punkte und Blöcke induzieren dieselbe Menge von Kreisen, nämlich die Kreise, die den Einheitskreis von innen berühren. Jeder dieser Kreise steht also sowohl für einen Punkt, als auch für einen Block.

Diese Modelle können als Untergeometrien der klassischen Möbiusebene betrachtet werden. Eine genauere Untersuchung und weitere Verallgemeinerungen finden sich in [3], [4] und [5].

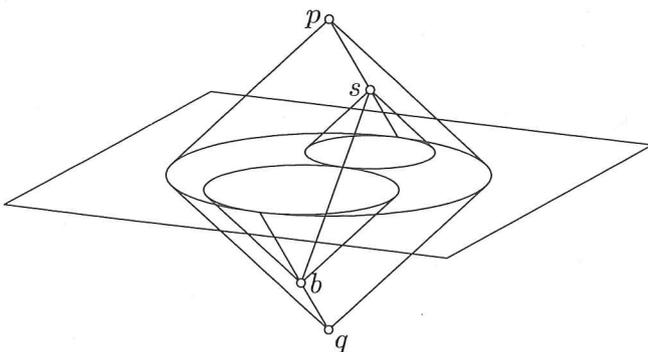


Bild 10: Im apollonischen Modell inzidiert ein Punkt s genau dann mit einem Block b , wenn sich die zugehörigen Kreise berühren. Der Berührungspunkt ist der Schnittpunkt der Lichtgeraden durch s und b mit der Ebene E_t .

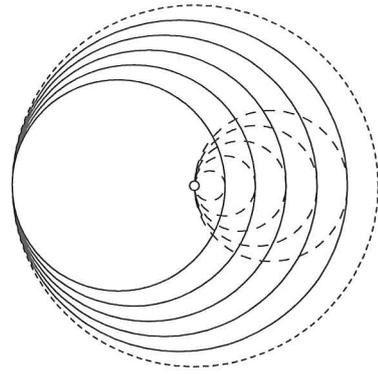


Bild 11: Einige Blöcke einer Parallelklasse und einige Punkte einer Parallelklasse im Apollonius Modell für $t = 1$. Jeder der Punkte inzidiert mit genau einem der Blöcke.

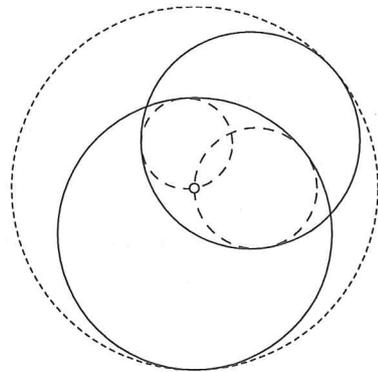


Bild 12: Zwei Blöcke, die sich in zwei Punkten schneiden, im Apollonius-Modell für $t = 1$ betrachtet.

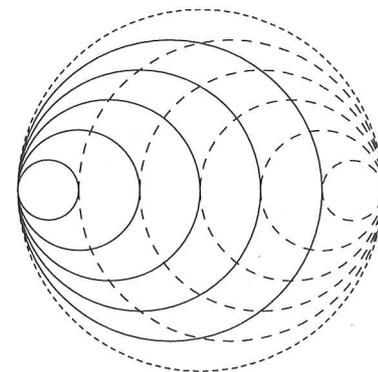


Bild 13: Einige Blöcke einer Parallelklasse und einige Punkte einer Parallelklasse im Apollonius Modell für $t = 0$. Jeder der Punkte inzidiert mit genau einem der Blöcke.

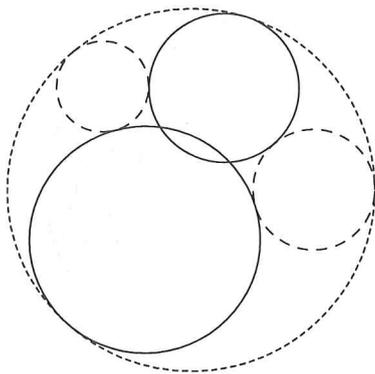


Bild 14: Zwei Blöcke, die sich in zwei Punkten schneiden, im Apollonius Modell für $t = 0$ betrachtet.

5. Verallgemeinerte Dreiecke und Vierecke

In diesem letzten Abschnitt wollen wir kurz die Beziehung zwischen Semiplanes und anderen Geometrien beleuchten. Das Bindeglied ist dabei das verallgemeinerte Viereck. Ein verallgemeinertes Viereck läßt sich als ein besonders eng geschnürtes Bündel aus den vorher betrachteten Kreisebenen und Semiplanes auffassen. Der Faden, der dieses Bündel zusammenhält, ist die Lösung des Apollonischen Problems. Unsere Beschreibung wird notwendigerweise etwas skizzenhaft ausfallen. Genauere Darstellungen finden sich in [5], [4] und [3]. Die Beziehungen zwischen verallgemeinerten Vierecken und Kreisgeometrien, die vielen unserer Modelle zugrunde liegen, werden in [6] eingehend untersucht.

Das Apollonische Problem

Beim sogenannten Apollonischen Problem geht es darum, zu drei gegebenen Kreisen diejenigen Kreise zu konstruieren, die alle drei Kreise gleichzeitig berühren. Die Lösung dieses Problems wird Apollonius von Perga (262-190 v. Chr.) zugeschrieben. In [1]: I.6.86 werden verschiedene Lösungswege vorgestellt. Die Gültigkeit der Axiome S1 bis S4 in unseren „apollonischen“ Modellen ergibt sich auch als unmittelbare Folgerung aus der Lösung dieses alten Problems. Zum Beispiel geht es in Bild 14 darum, zu den drei gestrichelten Kreisen alle gemeinsamen Berührkreise zu finden.

Der euklidische Raum wird zum projektiven Raum abgeschlossen, indem „im Unendlichen“ eine Ebene eingefügt wird. Ähnlich läßt sich der Minkowskiraum mit den Lichtgeraden abschließen. Dazu wird „im Unendlichen“ ein Doppelkegel eingefügt. Dies ergibt das orthogonale Viereck $Q(4, \mathbf{R})$. Die Punktmenge dieses Vierecks ist die Quadrik

$$Q = \{ \langle a, b, c, d, e \rangle \mid a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2 \neq 0 \}.$$

Seine Geradenmenge besteht aus allen Geraden des umgebenden projektiven Raumes, die ganz in Q liegen.

Die Geometrie $Q(4, \mathbf{R})$ ist ein spezielles Beispiel eines *antiregulären verallgemeinerten Vierecks*. Verallgemeinerte Vierecke, und noch allgemeiner verallgemeinerte n -Ecke, spielen eine wichtige Rolle in einer Vielzahl von mathematischen Disziplinen, wie zum Beispiel der Inzidenzgeometrie, der Theorie der algebraischen Gruppen und der Differentialgeometrie. Verallgemeinerte n -Ecke sind natürliche Verallgemeinerungen von projektiven Ebenen, denn projektive Ebenen können auch als verallgemeinerte Dreiecke bezeichnet werden. Der Name n -Eck bezieht sich auf die Tatsache, daß sich in einem verallgemeinerten n -Eck, unter alleiniger Verwendung von Geraden der Geometrie, zwar gewöhnliche n -Ecke, aber keine gewöhnliche m -Ecke mit $1 < m < n$ zeichnen lassen. Entsprechend können in einem verallgemeinerten Dreieck, also einer projektiven Ebene, Dreiecke aber keine „Zweiecke“ gezeichnet werden. Daß es keine Zweiecke gibt besagt, daß sich zwei Punkte durch höchstens eine Gerade verbinden lassen.

Antiregularität ist eine geometrische Eigenschaft. Sie besagt, daß drei paarweise nicht verbindbare Punkte mit zwei Punkten oder keinem Punkt verbindbar sind.

Sei p ein Punkt von $Q(4, \mathbf{R})$. Die *abgeleitete Struktur bei p* ist wie folgt definiert: Die Punkte sind alle von p verschiedenen Punkte, die mit p verbindbar sind. Die Blöcke sind alle nicht mit p verbindbaren Punkte. Ein Punkt der Ableitung inzidiert mit einem Block der Ableitung, wenn die entsprechenden Punkte des Vierecks kollinear sind. Die abgeleitete Struktur ist isomorph zur klassischen reellen Laguerreebene, das ist die Geometrie der ebenen Schnitte mit einem Zylinder (vgl. [3]). Die Konstruktion läßt sich mit jedem antiregulären verallgemeinerten Viereck ausführen und ergibt stets eine Laguerreebene.

Seien p und q verschiedene Punkte von $Q(4, \mathbf{R})$. Die *abgeleitete Struktur bei p und q* ist wie folgt definiert: Die Punkte sind alle von p verschiedenen Punkte, die mit p aber nicht mit q verbindbar sind. Die Blöcke sind alle von q verschiedenen Punkte, die mit q aber nicht mit p verbindbar sind. Die Inzidenz wird wieder durch die Kollinearität im Viereck beschrieben. Sind p und q verbindbar, so ist die abgeleitete Struktur bei p und q isomorph zur euklidischen Ebene, der die vertikalen Geraden fehlen. Dies ist eine dualaffine Ebene. Sind p und q nicht verbindbar, so liefert die abgeleitete Struktur bei p und q im wesentlichen unsere Semibiplane.

Auch diese Konstruktion läßt sich für beliebige anti-reguläre verallgemeinerte Vierecke ausführen und ergibt dualaffine Ebenen oder Semibiplanes.

Die Ableitung bei p und q ist eine Unterstruktur der Ableitung bei p . Für beliebige anti-reguläre verallgemeinerte Vierecke liefert dies eine Verallgemeinerung des Zylindermodells.

Schließlich wollen wir noch erwähnen, daß unsere Semibiplane auch direkt aus der euklidischen Ebene konstruiert werden kann. Dazu wird die affine Ebene in geeigneter Weise „zusammengefaltet“. Sei π die Spiegelung der Ebene am Ursprung $(0, 0)$, sei \mathbf{P} die Menge aller ungeordneten Paare $(p, \pi(p))$, $p \neq (0, 0)$, von Punkten, und sei \mathbf{B} die Menge aller ungeordneten Paare $(l, \pi(l))$, $(0, 0) \notin l$, von Geraden. Ein Punkt $(p, \pi(p))$ inzidiert genau dann mit einem Block $(l, \pi(l))$, wenn $p \in l$ oder $p \in \pi(l)$ gilt. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß diese so definierte Geometrie eine Semibiplane ist. Tatsächlich kann man zeigen, daß diese Geometrie isomorph zu unserer Semibiplane ist.

Mit dieser letzten Bemerkung ergibt sich folgendes ansprechende Bild: Bewegen wir einen Punkt im anti-regulären verallgemeinerten Viereck hin und her, so ist die abgeleitete Geometrie zu jedem Zeitpunkt eine Laguerreebene. Spalten wir den Punkt in zwei verbindbare Punkte auf und achten wir bei der weiteren Bewegung darauf, daß die Punkte verbindbar bleiben, so haben wir zu jedem Zeitpunkt im wesentlichen die euklidische Ebene als abgeleitete Geometrie vor Augen. Bewegen wir nun die Punkte so weiter, daß sie nicht mehr verbindbar sind, so faltet sich die euklidische Ebene in unsere Semibiplane zusammen.

Literatur

- [1] A. Adler. *Theorie der geometrischen Konstruktionen*. Göschen Verlag, Leipzig, 1906.
- [2] D. R. Hughes. Biplanes and semibiplanes. In *Combinatorics*, volume 686 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 55-58. Springer, Berlin, 1978.
- [3] B. Polster and A.E. Schroth. Plane models for semi-biplanes, erscheint in *Beitr. Alg. Geom.*
- [4] B. Polster and A.E. Schroth. Semi-biplanes and antiregular generalised quadrangles. erscheint in *Geom. Dedicata*.
- [5] Burkard Polster. Semi-biplanes on the cylinder. *Geom. Dedicata*, 58:145-160, 1995.
- [6] A.E. Schroth. Topological Circle Planes and Topological Quadrangles, volume 337 of *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. Longman, Harlow, 1995.
- [7] P. Wild. On semi-biplanes. PhD thesis, Westfield College, University of London, 1980.
- [8] P. Wild. Some families of semibiplanes. *Discrete Math.*, 138:397-403, 1995.

Der erste Autor bedankt sich beim Australian Research Council für seine Unterstützung.